29-10-18

$a_n \to l \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n^{1/k} \to l^{1/k}$, $k \in \mathbb{N}$

Αν $l \neq 0$

Αν $l = 0$: $\exists\, a_{k_{\nu_n}}$ τω αν $a_n^{1/k} \not\to l^{1/k} \Rightarrow a_{k_{\nu_n}} \not\to l$

$a_n \geq 0$

Θδο $a_n^{1/k} \to 0$. Αν όχι τότε $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \{a_{\nu_n}\}$ τω.

$|a_{\nu_n}^{1/k}| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_{\nu_n}| \geq \varepsilon^k \Rightarrow a_{\nu_n} \not\to 0$, $n \in \mathbb{N}$

$\overset{\shortparallel}{a_{\nu_n}}$ (αφού $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Θεώρημα

Έστω ότι $\overbrace{a_n \leq \theta_n \leq \gamma_n}^{\text{ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim a_n = l = \lim \gamma_n$, $l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim \theta_n = l$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \geq n_0$, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\exists\, n_0' \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \geq n_0'$, $l - \varepsilon < \gamma_n < l + \varepsilon$

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$

$\to \forall n \geq n_0''$, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\forall n \geq n_0''$, $l - \varepsilon < \gamma_n < l + \varepsilon$

$l - \varepsilon < a_n \leq \theta_n \leq \gamma_n < l + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0''$

$\Rightarrow |\theta_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0''$

$\Rightarrow \theta_n \to l$

Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

0

Ασκήσεις

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^3-6n^2+5n+4}{5n^3+2n^2+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^3}(7-\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{\cancel{n^3}(5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \frac{7}{5}$

2) Έστω $a\in(0,1)$. νδο $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

$0<a<1 \Rightarrow \frac{1}{a}>1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1+\theta \quad (\theta>0,\ \theta=\frac{1}{a}-1)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta$ (ανισότητα Bernoulli)

$\Rightarrow a^n \leq \frac{1}{1+n\theta} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \xRightarrow{\text{Θεώρημα ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών}} a^n \to 0$

$a^n \geq 0$

$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$

$a_n \leq \theta_n \leq \gamma_n$

$\lim a_n = \lim \gamma_n = l \Rightarrow \lim \theta_n = l$

$a_n = 0$

$\theta_n = a^n$

$\gamma_n = \frac{1}{1+n\theta}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Για $n\geq 2$, $\sqrt[2n]{n} > 1 \Rightarrow \sqrt[2n]{n} = 1+a_n \quad (a_n = \underbrace{\sqrt[2n]{n}-1}_{>0})$

$\Rightarrow \left(\sqrt[2n]{n}\right)^n = (1+a_n)^n \underset{\text{Bernouli}}{\geq} 1+na_n$

$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 1+na_n$

$\Rightarrow a_n \le \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0$

$\downarrow$

$a_n > 0$

$\to$ Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$\Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[2n]{n} - 1 \to 0$

$\Rightarrow \sqrt[2n]{n} \to 1 \Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt[2n]{n}\right)^2}_{\sqrt[n]{n}} \to 1$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{[na]}{n} = a \quad , a \in \mathbb{R}$

$na - 1 < [na] \le na$

$\Rightarrow a - \frac{1}{n} < \frac{[na]}{n} \le a$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{[na]}{n} = a$

5) Έστω $a>0$. Τότε $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

Έστω $a \ge 1$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω. $\underbrace{n_0 \ge a}_{\text{Αρχ. Ιδιότητα}} \Rightarrow n_0^{1/n} \ge a^{1/n}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall\, n \ge n_0,\ n^{1/n} \ge a^{1/n} \ge 1$

$\Rightarrow \lim a^{1/n} = 1$

Αν $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} \to 1 \Rightarrow \frac{1}{a^{1/n}} \to 1 \Rightarrow a^{1/n} \to 1$

6) Έστω $0<x<y$, νδο $\sqrt[n]{x^n+y^n} \to y$

$$y=\sqrt[n]{y^n} \leq \sqrt[n]{x^n+y^n} \leq \sqrt[n]{y^n+y^n} = \sqrt[n]{2} \cdot y \to 1 \cdot y = y$$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{x^n+y^n} = y$

7) νδο $\lim \frac{n \cdot ημ((n!)^2)}{n^2} = 0$ παραγοντικό

$$\left| \frac{n \cdot ημ((n!)^2)}{n^2} \right| = \frac{|ημ((n!)^2)|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-\frac{1}{n}} \leq \underbrace{\frac{n \cdot ημ((n!)^2)}{n^2}}_{A} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{n}}$$

$\lim A \to 0$

<u>Ορισμός</u>

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\forall M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq n_0$, $a_n > M$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, $\forall μ<0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \leq n_0$, $a_n < μ$

$\forall M>0$ $\forall n \geq n_0$ $a_n > -M$

* $a_n \to +\infty$, αν $\forall ε>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n > n_0$, $a_n > 1/ε$

Παρατήρηση

$a_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n$ μη-φραγμένη

Παραδείγματα

1) $a_n = n$, $a_n \to +\infty$, επειδή: Έστω $M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $n_0 > M \Rightarrow n \geq n_0$, $a_n = n \geq n_0 > M \to a_n \to +\infty$

2) $a_n = (-1)^n \cdot n$, $a_n \not\to +\infty$. Έστω $M>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_n > M$, $\forall n \geq n_0$?

Έστω ότι $\exists$ τέτοιο n_0. Έχουμε $a_{n_0} > M > 0 \Rightarrow (-1)^{n_0} > 0$
$\Rightarrow (-1)^{n_0+1} < 0 \Rightarrow a_{n_0+1} = (-1)^{n_0+1} \cdot (n_0+1) < 0 < M$

$\{a_n\}$ oscillates → ταλαντεύεται
↳ όταν δεν υπάρχουν τα όρια $\pm\infty$

A) **Θεώρημα**

Αν $a_n \to \pm\infty$ τότε κ' κάθε υπακολουθία της $\{a_n\}$ έχει το ίδιο όριο

B) **Θεώρημα**

Αν $a_n \leq b_n$ τότε:

(i) Αν $\lim a_n = +\infty \to \lim b_n = +\infty$

(ii) Αν $\lim b_n = -\infty \to \lim a_n = -\infty$

Γ) **Θεώρημα**

Έστω ότι $\lim \frac{a_n}{b_n} = l > 0$. Τότε $\lim a_n = +\infty$ αν $\lim b_n = +\infty$, $\lim a_n = -\infty$ αν $\lim b_n = -\infty$

Εφαρμογή

Έστω $a>1 \rightarrow \lim a^n = +\infty$

Απόδειξη

$a = 1+\theta \quad (\theta = a-1) \quad | a>0$

$\rightarrow a^n = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta \geq n\theta \rightarrow +\infty$

B Θεώρημα $a^n \rightarrow +\infty$